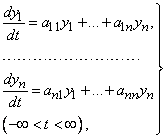
Будем искать решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image001.gif

                                      (1)

или

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image003.gif,                                            (1’)

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image004.gif - заданная числовая [матрица](http://sernam.ru/lect_math1.php?id=5), в следующем виде:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image005.gif,                              (2)

или

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image006.gif.                                              (2’)

Числа http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image007.gif подлежат определению.

Конечно, числа

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image008.gif

дают тривиальное решение системы (1):

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image009.gif.

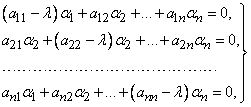
Но нас интересуют нетривиальные решения, соответствующие ну равным нулю векторам

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image010.gif.

Имеем

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image011.gif.

Подставляя функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image012.gif и их [производные](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=117) в (1), после сокращения на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image013.gif и переноса членов в одну сторону, получим

          (3)

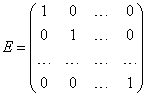
или в матричной форме

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image015.gif,                                             (3’)

или

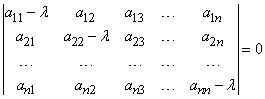
http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image016.gif,                                        (4)

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image010.gif, а



- [единичная матрица](http://sernam.ru/book_matrix.php?id=5).

Для того, чтобы система (3) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее [определитель](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=96) был равен нулю:

                      (5)

Уравнение (5) называется [характеристическим уравнением](http://stu.sernam.ru/book_algebra.php?id=186) системы (1). Из уравнения (5) мы и находим те значенияhttp://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image019.gif, при которых система (4) имеет нетривиальные решения http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image020.gif.

Левая часть (5) есть [многочлен](http://edu.sernam.ru/book_m_cat.php?id=22) степени http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif по переменной http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image019.gif. С учетом кратности этот многочлен имеет http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif корней:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image022.gif.                                   (6)

Если все http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif нулей различны, то, подставляя каждый из них http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image023.gif в систему (4) и решая ее, мы получим некоторый удовлетворяющий ей нетривиальный [вектор](http://sernam.ru/lect_math1.php?id=14)

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image024.gif.              (7)

Этот вектор определяется неоднозначно – с точностью из скалярного множителя.

Из (4) видно, что http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image025.gif являются [собственными значениями матрицы](http://edu.sernam.ru/book_kiber2.php?id=543) ([линейного преобразования](http://edu.sernam.ru/book_p_math2.php?id=173)) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif, а векторы http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image027.gif - собственными векторами http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif.

Векторы http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image028.gif линейно независимы, если все [собственные значения](http://edu.alnam.ru/book_math_al_3.php?id=43) различны. Доказательство можно провести по индукции.

Докажем, что любые http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image029.gif векторов этой системы линейно независимы между собой.

Для http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image030.gif это очевидно, потому что каждый из векторов http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image031.gif не тривиален. Пусть наше утверждение верно для http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image032.gif векторов. Докажем его для http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image029.gif векторов.

Предположим противное. Пусть, например, первые http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image029.gif векторов нашей системы линейно зависимы. Тогда

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image033.gif,                              (8)

где хотя бы один из коэффициентов http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image034.gif отличен от нуля. Для определенности будет считать, что http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image035.gif. Применим[линейное преобразование](http://edu.sernam.ru/book_p_math2.php?id=173), порожденное матрицей http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif, к обеим частям (8):

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image036.gif.                       (9)

Умножая (8) на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image037.gif и вычитая из (9), получаем

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image038.gif,

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image039.gif при всех http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image040.gif.

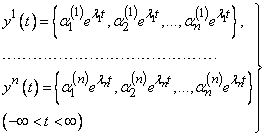
Значит, http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image041.gif, и мы получили, что векторы http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image042.gif линейно зависимы, что противоречит предположению.

Итак, собственные векторыhttp://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image043.gif, отвечающие различным собственным числам http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image025.gif, линейно независимы и [определитель](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=96), составленный из координат этих векторов, не равен нулю:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image044.gif.

Замечание 1. Так как в http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif- мерном пространстве не может быть больше чем http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif линейно независимых векторов, то каждому [собственному значению](http://edu.alnam.ru/book_math_al_3.php?id=43) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image025.gif (если все они различны!) соответствует только один [собственный вектор](http://edu.alnam.ru/book_math_al_3.php?id=43) с точностью до постоянного множителя.

В результате получаем http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif вектор-функций  - решений системы (1)

                                     (10)

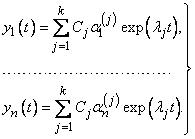
[Вектор-функции](http://sernam.ru/lect_math2.php?id=63) (10) образуют линейно независимую систему на интервале http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image046.gifб так как их [определитель](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=96)Вронского

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image047.gif.

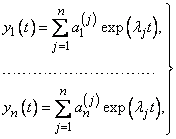
Поэтому общее решение системы (1) имеет вид

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image048.gif,                                           (11)

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image034.gif - произвольные постоянные. В развернутом виде общее решение можно записать:

                             (11')

Замечание 2. На практике, вместо того чтобы находить векторы http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image050.gif из [линейных систем](http://sernam.ru/d_23.php) (4), ищут общее решение системы (1) в виде



где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image052.gif корни [характеристического уравнения](http://stu.sernam.ru/book_algebra.php?id=186) (различные!), а http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image053.gif - числа, которые надо найти. Из изложенной теории следует, что такие числа существуют.

Чтобы найти числа http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image053.gif, подставляем функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image054.gif в систему (1) и сравниваем коэффициенты при одинаковых http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image055.gif. Числа http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image053.gif получаются при этом неоднозначно, они зависят от http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif произвольных постоянных.

Пример 1.Решить систему



Характеристическое уравнение

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image057.gif,

имеет корни http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image058.gif. Исходя из структуры общего решения, будем искать решения в виде

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image059.gif

(т.е. мы опускаем процесс нахождения числа http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image053.gif).

Коэффициенты http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image060.gif выразим через http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image061.gif. Подставляя функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image062.gif и http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image063.gif в одно из уравнений системы, получаем

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image064.gif,

откуда http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image065.gif, т.е.

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image066.gif, http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image067.gif.

Таким образом, общее решение имеет вид

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image068.gif

Пусть теперь [характеристическое уравнение](http://stu.sernam.ru/book_algebra.php?id=186) (5) системы (1) имеет корень http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image069.gif кратности http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image070.gif. Сведем систему (1) к одному уравнению http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif- го порядка относительно функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image071.gif. Это уравнение и система (1) имеют одно и то же[характеристическое уравнение](http://stu.sernam.ru/book_algebra.php?id=186) (доказательство ниже). Но тогда, как мы знаем, корню http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image069.gif  кратности http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image070.gif соответствует решение http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif- го порядка вида

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image072.gif,

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image073.gif - произвольные постоянные. Таким образом,

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image074.gif,

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image075.gif есть [многочлен](http://edu.sernam.ru/book_m_cat.php?id=22) степени http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image076.gif.

Рассуждая аналогично, мы и другие функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image054.gif можем выразить в форме

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image077.gif,                                     (12)

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image078.gif многочлены степени http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image076.gif.

Каждая из функций http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image054.gif удовлетворяет указанному [дифференциальному уравнению](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=40) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gif- го порядка, каковы бы ни были коэффициенты многочлена http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image078.gif.

Остаются среди многочленов http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image079.gif отобрать такие, чтобы соответствующие им функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image080.gif совместно удовлетворяли системе (1). Для этого надо подставить http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image081.gif в систему (1), сократить ее на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image082.gifи сравнить коэффициенты при одинаковых степенях http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image083.gif. Искомые коэффициенты будут зависеть от http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image070.gif произвольных постоянных. Можно иногда порекомендовать взять [многочлен](http://edu.sernam.ru/book_m_cat.php?id=22) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image075.gif произвольным, и тогда коэффициенты остальных многочленов http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image084.gif уже определятся однозначно через коэффициенты http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image085.gif.

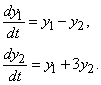
Однако возможно, что на этом пути мы придем к противоречию, показывающему, что на самом деле в данном случае некоторые коэффициенты многочлена http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image085.gif равны нулю и их считать произвольными нельзя.

Подобным образом рассуждаем и в отношении других [кратных корней](http://edu.sernam.ru/book_sm_math1.php?id=186) характеристического уравнения, если таковые у данного уравнения имеются. Решения, соответствующие простым корням, ищем в виде (8), как объяснялось выше.

Чтобы получить общее решение системы (1), надо взять сумму указанных решений ([вектор-функций](http://sernam.ru/lect_math2.php?id=63)).

В простых случаях можно искать решение сразу в виде суммы подобных решений. Это лучше всего выяснить на примерах.

Пример 2.Решить систему



Характеристическое уравнение http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image087.gif или http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image088.gif имеет [кратный корень](http://edu.sernam.ru/book_sm_math1.php?id=186) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image089.gif.

Дифференциальное уравнение, соответствующее нашей системе для функции http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image090.gif, имеет вид http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image091.gif. Оно имеет то же [характеристическое уравнение](http://stu.sernam.ru/book_algebra.php?id=186).

Решение системы надо искать в виде

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image092.gif.

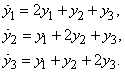
Подставляя эти функции в систему, получаем

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image093.gif

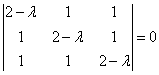
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image083.gif (в первом равенстве), получаем http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image094.gif. Второе равенство дает те же самые решения. Итак, общее решение системы имеет вид

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image095.gif.

Пример 3.Решить систему



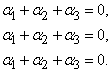
Характеристическое уравнение имеет вид



или

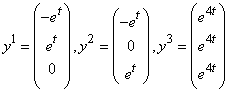
http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image098.gif.

Таким образом, http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image099.gif - корень второй кратности, а http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image100.gif - простой корень характеристического уравнения. Система (3) при http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image099.gif имеет вид



Поэтому http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image102.gif должны быть такими, чтобы http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image103.gif т.е. у нас две свободные переменные, скажем http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image104.gif и http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image105.gif.

Поэтому, например, http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image106.gif - линейно независимые [собственные векторы матрицы](http://edu.sernam.ru/book_kiber2.php?id=543) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif нашей системы ([матрица](http://sernam.ru/lect_math1.php?id=5) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif симметрическая). Для http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image100.gif находим http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image107.gif. Поэтому

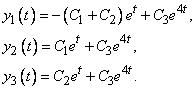


- линейно независимые решения и

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image109.gif

- общее решение нашей системы.

В развернутом виде общее решение можно записать:



Замечание 3. Если [матрица](http://sernam.ru/lect_math1.php?id=5) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif симметрическая http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image111.gif, то соответствующий [линейный оператор](http://sernam.ru/book_tp.php?id=86) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif будет самосопряженным и, как мы знаем, в этом случае, какие бы корни уравнение (5) ни имело (в том числе и кратные), существует система из http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image021.gifсобственных линейно независимых векторов http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image020.gif и, следовательно, для системы (1) с симметрической матрицей http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image026.gif можно написать общее решение, зная вектора http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_41.files/image112.gif.